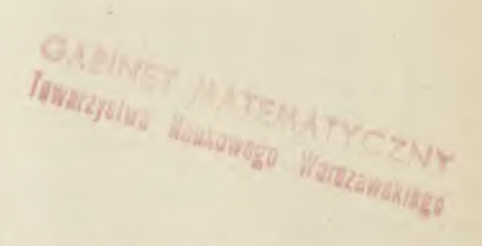


Erster Artikel.

Über die elementaren Methoden zur Lösung der geometrischen Aufgaben

von Ettore Baroni in Rom.[1])

§ 1. Vorbereitende Betrachtungen. Der natürliche Weg zur Lösung einer geometrischen Aufgabe besteht bekanntlich darin, daß man sie auf eine bereits gelöste zurückführt, indem man von der gestellten Aufgabe zu einer gleichwertigen oder doch zu einer solchen übergeht, unter deren Lösungen die der gegebenen Aufgabe enthalten ist, von dieser wieder zu einer anderen usf., bis man, wie oben gesagt, zu einer Aufgabe gelangt, die man auflösen kann (Analysis).

Dieser Untersuchungsmethode, die, wie man sieht, nicht einen sicheren zu durchlaufenden Weg angibt, sondern einfach eine Richtung bezeichnet, um unsere Versuche zu leiten, kommt die Figur zu Hilfe, d. h. eine nichts Wesentliches verschleiernde Darstellung der Daten und der gesuchten Dinge (wenn man deren Art kennt), wobei den Beziehungen, die zwischen diesen und den Daten bestehen sollen, möglichst Rechnung getragen ist.

Kurz, man setzt das unbekannte Ding oder einen seiner Teile als bekannt voraus und sucht durch Betrachtung der Figur und das

1) Von dem Verfasser des Artikels wurden folgende Arbeiten benutzt:
G. Lamé, *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie,* Paris 1818;
P. Serret, *Des méthodes en Géométrie,* Paris 1855;
J. M. C. Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement,* 5 vol., Paris 1866—72;
J. Petersen, *Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben,* deutsch von R. v. Fischer-Benzon, Kopenhagen 1879;
R. Bettazzi, *La risoluzione dei problemi numerici e geometrici,* Torino 1893;
I. Alexandroff, *Problèmes de Géométrie élémentaire,* trad. par Aitoff, Paris 1890, deutsche Ausgabe: *Aufgaben aus der niederen Geometrie* von M. Schuster, Leipzig 1903;
F. Enriques e U. Amaldi, *Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori,* Bologna 1903.

Ziehen zweckmäßiger Hilfslinien die Beziehungen, welche die Daten mit den unbekannten Dingen verbinden, zu transformieren, wobei man diese, wenn es nötig ist, durch andere ersetzt, die zur Bestimmung jener dienen können und zur Ausführung des oben erwähnten Überganges geeigneter sind.

Wenn dies die vollständige Lösung der Aufgabe ergibt, so wird die Konstruktion, die von den gegebenen Dingen zu den gesuchten führt (wofern die Aufgabe nicht unmöglich ist), zu beschreiben sein, und es ist zu zeigen, daß die gefundenen Dinge sämtlich oder zum Teil Lösungen der gegebenen Aufgabe sind; dieser Beweis wird überflüssig, wenn man sicher ist, bei dem im Anfang angegebenen Verfahren beständig durch gleichwertige Aufgaben hindurch gegangen zu sein.

Da man endlich die Daten in verschiedenen Fällen darstellen kann, so daß sie nach Zahl und Art verschiedene Lösungen ergeben, so wird man diese verschiedenen Fälle unterscheiden müssen. Das ist die Aufgabe der Diskussion (Determination), der es also zukommt zu erkennen, ob die Daten der gestellten Aufgabe ganz allgemein sein können oder ob sie gewissen Bedingungen (die zu bestimmen sein werden) genügen müssen, damit die Aufgabe Lösungen haben kann.

Das oben angegebene Verfahren läßt erkennen, daß die Lösung einer Aufgabe wesentlich in deren Zurückführung auf andere Aufgaben, die als bereits gelöst betrachtet werden, besteht. Man muß also schließlich zu einigen Fundamentalaufgaben kommen, deren Lösbarkeit durch ein Postulat vorausgesetzt wird.

Die Postulate, die sich auf die (fundamentalen) Konstruktionen zur Lösung der als fundamental betrachteten Aufgaben beziehen, knüpfen unmittelbar an den Gebrauch der für diese Konstruktionen benutzten Instrumente an.

In der ebenen Elementargeometrie werden als fundamentale Konstruktionen diejenigen angenommen, welche durch das Lineal und den Zirkel gegeben sind, nämlich die folgenden:

1. die Bestimmung der Geraden, die durch zwei Punkte geht;

2. die Bestimmung des gemeinsamen Punktes zweier (nicht paralleler) Geraden;

3. die Bestimmung des Kreises von gegebenem Mittelpunkte, der durch einen gegebenen Punkt geht;

4. die Bestimmung der Punkte, die einem gegebenen Kreise und einer ihn schneidenden Geraden gemeinsam sind;

5. die Bestimmung der Punkte, die zweien sich schneidenden Kreisen gemeinsam sind.

Eine Aufgabe wird als elementar lösbar betrachtet, wenn ihre

Lösung sich auf die eben angegebenen fundamentalen Konstruktionen zurückführen läßt.

Man muß zwischen den beiden Begriffen der Möglichkeit und der Lösbarkeit einer Aufgabe wohl unterscheiden. Eine Aufgabe ist möglich, wenn sie Lösungen hat; aber es kann sich ergeben, daß diese Lösungen mit Hilfe der angeführten fundamentalen Konstruktionen (d. h. mit dem Lineal und dem Zirkel) nicht zu erhalten sind. Alsdann ist die Aufgabe elementar unlösbar. Wir heben dabei die Tatsache hervor, daß der Begriff der Lösbarkeit einer Aufgabe relativ ist; absolut genommen müßte jede mögliche Aufgabe als lösbar betrachtet werden, wofern man nur zu ihrer Lösung geeignete fundamentale Konstruktionen anwendet, die durch passende Instrumente (von komplizierterer Art als das Lineal und der Zirkel) gegeben werden.

Für die Aufgaben der räumlichen Geometrie würde man andere fundamentale Konstruktionen postulieren müssen, in dem elementaren Gebiete solche für die Bestimmung von Ebenen und Kugeln und ihrer gegenseitigen Schnittpunkte.

Die folgende Auseinandersetzung aber wird sich auf die Aufgaben der ebenen Geometrie beschränken.

§ 2. Das Aufsuchen geometrischer Örter. Die Aufgaben, welche den Gegenstand einer geometrischen Behandlung bilden können, müssen vor allem in zwei Klassen eingeteilt werden:

1. Zur ersten Klasse gehören diejenigen, unbestimmt genannten, Aufgaben, in denen die gestellten Bedingungen nicht eine einzige ihnen genügende Figur oder eine endliche Zahl von Figuren bestimmen, sondern noch die Möglichkeit übrig lassen, ein Element der zu konstruierenden Figur willkürlich vorzuschreiben oder irgend einer weiteren Bedingung zu unterwerfen.

2. Dagegen wird die Klasse der bestimmten Aufgaben von denjenigen Aufgaben gebildet, in denen die gegebenen Bedingungen im allgemeinen eine Figur oder eine endliche Zahl von Figuren völlig bestimmen.

Der am häufigsten vorkommende Typus der unbestimmten Aufgaben der ebenen Geometrie, auf den sich im allgemeinen alle andern zurückführen lassen, besteht in der Konstruktion einer Linie, deren Punkte einer gegebenen Bedingung genügen; diese Linie nennt man den geometrischen Ort der Punkte, welche der genannten Bedingung genügen, wenn sich jeder dieser Bedingung genügende Punkt auf der Linie befindet.

Die Bestimmung geometrischer Örter mit elementaren Mitteln ist sehr beschränkt, da die einzigen mit solchen Mitteln konstruierbaren Linien Gerade und Kreise oder Strecken und Kreisbogen sind.

Daher kann das Aufsuchen eines Ortes, wenn es eine elementar lösbare Aufgabe bildet, auf Grund einer kleinen Zahl von Versuchen ausgeführt werden, sobald einige besondere Punkte des Ortes konstruiert sind. Wenn z. B. zwei dem in Rede stehenden Orte angehörende Punkte bestimmt sind, so kann man vor allem nachweisen, ob dieser Ort die Gerade ist, welche diese Punkte verbindet, oder eine Strecke auf ihr, oder ob er von einem Kreise oder einem Kreisbogen gebildet wird, der in irgend einer besonderen Beziehung zu den beiden Punkten steht, usw.

Das Wichtige besteht darin, die Linie, um deren Bestimmung es sich handelt, zu entdecken; damit wird die Ausführung der Analysis der Aufgabe erleichtert: man zeigt, daß die Linie der vorgeschriebenen Bedingung genügt.

Es mögen einige Beispiele bemerkenswerter geometrischer Örter folgen:

1. Der geometrische Ort der Punkte der Ebene, für welche die Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und B eine konstante Differenz q^2 haben, ist eine Gerade, die auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte senkrecht steht.

Es sei P ein Punkt des verlangten Ortes, dann ist

$$\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = q^2.$$

Wenn C der Fußpunkt der von P auf AB gefällten Normalen ist, so ist

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = (\overline{AP}^2 - \overline{CP}^2) - (\overline{BP}^2 - \overline{CP}^2) = q^2.$$

So erkennt man, daß die Normale PC, deren Fußpunkt sich leicht bestimmen läßt, der verlangte Ort ist.

Folglich:

2. Der Ort der Punkte gleicher Potenzen in bezug auf zwei gegebene Kreise ist eine Gerade, die auf der Zentrale der Kreise senkrecht steht (die Radikalachse, Potenzlinie, Chordale der beiden Kreise).

Daher:

3. Der Ort der Mittelpunkte der Kreise, welche zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneiden, ist der außerhalb der Kreise gelegene Teil der Radikalachse, wenn die Kreise sich schneiden, und die ganze Radikalachse, wenn die Kreise sich nicht schneiden.

4. Der geometrische Ort der Punkte P einer Ebene von der Art, daß die Summe des m-fachen Quadrates von AP und des n-fachen

Quadrates von BP, wenn A und B gegebene Punkte sind, einem Quadrate q^2 gleich ist, ist ein Kreis, der seinen Mittelpunkt in dem Punkte C der Strecke AB hat, für den $mAC = nBC$ ist.

Es sei P ein Punkt des Ortes, dann ist:

$$q^2 = m \cdot \overline{AP}^2 + n \cdot \overline{BP}^2,$$

und wenn C ein Punkt der Strecke AB ist, dann erhalten wir leicht.

$$q^2 = (m+n) \cdot \overline{CP}^2 + m \cdot \overline{AC}^2 + n \cdot \overline{BC}^2 - 2CP \cdot \cos \sphericalangle BCP (nBC - mAC).$$

Wenn man nun für C denjenigen Punkt der Strecke AB wählt, für welchen $mAC = nBC$ ist, dann ist

$$q^2 = (m+n) \cdot \overline{CP}^2 + m \cdot \overline{AC}^2 + n \cdot \overline{BC}^2,$$

und also ist $\overline{CP}^2$ für jeden Punkt des Ortes konstant, also CP konstant.

5. Der geometrische Ort der Punkte einer Ebene, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und B ein Verhältnis gleich dem der Strecken p und q haben, ist ein Kreis.

Für jeden Punkt P des Ortes ist:

$$AP : BP = p : q.$$

Da man nun weiß, daß zwei Punkte C und D, der eine innerhalb und der andere außerhalb der Strecke AB, existieren, für welche

$$AC : BC = p : q$$
$$AD : BD = p : q$$

ist, so denkt man sofort daran, daß der gesuchte Ort der Kreis sein könnte, der CD zum Durchmesser hat. Und das ist auch der Fall, da man leicht beweist, daß jeder Punkt P, der obiger Gleichung genügt, sich auf diesem Kreise befindet, und umgekehrt jeder Punkt dieses Kreises obiger Gleichung genügt.

6. Der Ort der Punkte, von denen aus man zwei gegebene Kreise unter einem und demselben Winkel sieht, ist ein Kreis.

Die Mittelpunkte der Kreise seien O und O', und P sei ein Punkt des Ortes. Dann sind die Winkel APO und $O'PB$ einander gleich und die beiden Dreiecke OAP und $O'BP$ ähnlich, daher

$$OP : O'P = OA : O'B.$$

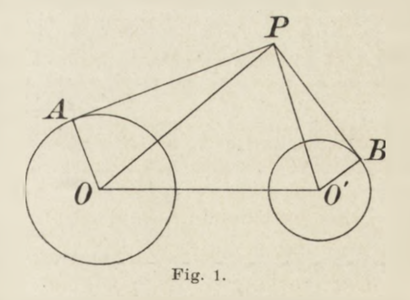


Fig. 1.

Umgekehrt, wenn P ein Punkt ist, für den $OP : O'P = OA : O'B$ ist, dann sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke OAP und $O'BP$ ähnlich und daher die Winkel APO und

OPB gleich. Der gesuchte Ort ist also der Ort der Punkte der Ebene, deren Entfernungen von den beiden Mittelpunkten O und O' sich wie die Radien der beiden gegebenen Kreise verhalten.

7. Der Ort der Mittelpunkte der Kreise, die von zwei gegebenen Punkten A und B unter zwei gegebenen Winkeln α und β gesehen werden, ist ein Kreis.

Man kann einen Punkt des Ortes finden, wenn man zwei rechtwinklige Dreiecke konstruiert, die eine gleiche Kathete haben und in denen die andern Katheten größer als die Hälfte der Strecke AB und die an diesen Katheten liegenden Winkel gleich $\frac{1}{2}\alpha$ und $\frac{1}{2}\beta$ sind. Der Eckpunkt P des Dreiecks, das man dann über AB mit den Hypotenusen AP und BP dieser beiden so gefundenen Dreiecke konstruiert, ist ein Punkt des Ortes.

Für jeden andern Punkt X des Ortes ist dann infolge der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke ACP und AEX:

$$AP : AX = CP : EX.$$

Ebenso erhält man aus den ähnlichen Dreiecken BDP und BFX:

$$BP : BX = DP : FX$$

und daher:

$$AP : BP = AX : BX.$$

Fig. 2.

Umgekehrt, wenn X ein Punkt ist, für den

$$AP : BP = AX : BX$$

ist, so ist X ein Punkt des Ortes.

In der Tat, man konstruiere über AX als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck AEX, in dem der $\sphericalangle EAX = \frac{1}{2}\alpha$ ist, und ziehe von B aus an den Kreis mit dem Mittelpunkte X und dem Radius EX die Tangente BF. Dann ergeben die ähnlichen Dreiecke ACP und AEX:

$$AP : AX = CP : EX$$

und daher ist nach der gemachten Voraussetzung:

$$BP : BX = CP : EX = DP : FX,$$

also sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke BDP und BFX ähnlich, und daher ist $\sphericalangle FBX = \frac{1}{2}\beta$.

Der verlangte Ort ist aber ein leicht zu konstruierender Kreis (vgl. Beisp. 5).

§ 3. Lösung der bestimmten Aufgaben nach der Methode der geometrischen Örter. Es existieren auf dem elementaren Gebiete für die Lösung der geometrischen Aufgaben genau genommen keine allgemeinen Methoden, da die Entwickelung eines systematischen Gesichtspunktes gerade die höheren Richtungen der analytischen oder projektiven Geometrie usw. charakterisiert.

Immerhin lassen sich die Methoden, die man bei der Behandlung verschiedener Klassen von Aufgaben mit Erfolg anwendet, schließlich auf zwei Grundgedanken zurückführen:

auf den (analytischen) Grundgedanken, die Bedingungen, welche die Figur der Lösung bestimmen, von einander zu trennen, so daß man diese durch den Schnitt geometrischer Örter erhält,

auf den Grundgedanken der Transformation.

Wenn wir zunächst von der Methode der Örter sprechen wollen, so bemerken wir, daß diese unmittelbar in denjenigen Fällen zur Anwendung kommt, in welchen die verlangte Figur durch eine gewisse Zahl von Punkten bestimmt werden kann, die zwei von einander unabhängigen Bedingungen unterworfen sind: läßt man eine von diesen Bedingungen fallen, so erhält man eine Linie als geometrischen Ort der Punkte, die der andern Bedingung genügen, und so erscheinen die zu konstruierenden Punkte als die Schnittpunkte zweier Linien. Die Aufgabe ist daher ohne weiteres elementar gelöst, wenn die Linien, welche die erwähnten Örter bilden, aus Geraden und Kreisen bestehen. Wenn dies nicht der Fall ist, so kann es sich immerhin ergeben, daß die Aufgabe auf diesen Fall zurückkommt — wenn man nämlich in der Wahl der Punkte, die die zu findende Figur bestimmen, eine zweckmäßige Änderung eintreten läßt.

Es mögen hier einige einfache Aufgaben folgen, die unmittelbar, wie oben gesagt, nach der Methode der Örter gelöst werden können.

1. Beispiel. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, wenn man eine Seite c und die dazu gehörige Mittellinie m kennt und außerdem weiß, daß $AC : BC = p : q$, wo mit p und q gegebene Strecken bezeichnet werden.

Setzt man $AB = c$, so ist klar, daß zur Bestimmung des Dreiecks nur die Bestimmung des Eckpunktes C nötig ist, der folgenden beiden Bedingungen genügt:

1. seine Entfernungen von A und B müssen derartig sein, daß

$$AC : BC = p : q,$$

2. er muß von dem Mittelpunkte O von AB um eine Strecke gleich m entfernt sein.

Lassen wir die zweite Bedingung außer Betracht, so ist der geometrische Ort der Punkte, die der ersten genügen, ein Kreis, der den Abstand derjenigen Punkte zum Durchmesser hat, welche die Strecke AB innerhalb und außerhalb nach dem Verhältnisse $p:q$ teilen (§ 2, Beisp. 5).

Lassen wir dagegen die erste Bedingung außer Betracht, so ist der geometrische Ort der Punkte, welche der zweiten genügen, ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius m.

Der gesuchte Punkt ist der Schnittpunkt dieser beiden Örter, und man würde leicht erkennen, daß die Aufgabe entweder keine Lösung hat oder eine (wenn man die gleichen, aber der Lage nach verschiedenen Lösungen als eine einzige Lösung betrachtet).

2. Beispiel. Es ist ein Kreis zu konstruieren, der von drei gegebenen Punkten A, B, C aus unter den drei Winkeln α, β, γ gesehen wird.

Man wird zunächst den Mittelpunkt des verlangten Kreises bestimmen. Er soll der Mittelpunkt eines Kreises sein, der von A aus unter dem Winkel α, von B aus unter dem Winkel β und von C aus unter dem Winkel γ gesehen wird. Läßt man die erste dieser Bedingungen außer Betracht, so ist der geometrische Ort der Punkte, die den beiden andern Bedingungen genügen, ein Kreis (§ 2, Beisp. 7). Läßt man die zweite Bedingung außer Betracht, so ist der geometrische Ort der Punkte, welche den beiden andern Bedingungen genügen, wiederum ein Kreis. Der gesuchte Punkt befindet sich dort, wo diese beiden Kreise sich schneiden. Da man jedoch, anstatt die erste oder die zweite Bedingung außer Betracht zu lassen, auch die dritte beiseite lassen kann, so ist klar, daß die Aufgabe höchstens sechs Lösungen haben kann.

Ist der Mittelpunkt P bestimmt, so erhält man den Radius des gesuchten Kreises, indem man z. B. von A aus einen Strahl zieht, der mit dem Strahle AP einen Winkel gleich der Hälfte von α bildet, und auf diesen Strahl von P aus die Normale fällt.

In manchen Fällen hat man nicht beide geometrische Örter, sondern nur einen nötig, wenn nämlich eine Linie gegeben ist, auf der der gesuchte Punkt liegen muß.

3. Beispiel. Es sind drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte A, B, C gegeben und eine Gerade AD ihrer Ebene, die durch einen von ihnen, A, geht; es ist ein Kreis zu beschreiben, der durch A und B geht und AD derart in einem Punkte E trifft, daß EC Tangente an diesen Kreis ist.

Setzen wir, wie immer, die Aufgabe als gelöst voraus, so sieht man, daß der Winkel BEC dem Winkel BAD gleich ist und daß also E ein Punkt von AD ist, von dem aus man BC unter dem bekannten Winkel BAD sieht. Läßt man die Bedingung, daß E auf AD liegen soll, außer Betracht, so bestimmt also die übrig bleibende Bedingung den geometrischen Ort der Punkte, von denen aus man BC unter dem Winkel BAD sieht. Der verlangte Punkt wird also dort liegen, wo AD und dieser Ort sich schneiden.

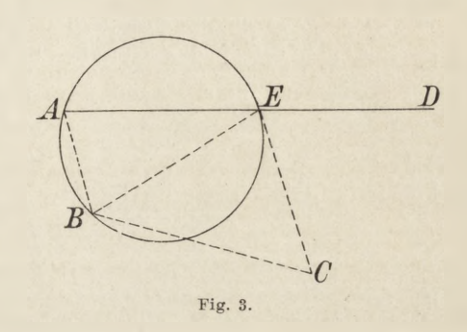


Fig. 3.

In den vorstehenden Fällen führt die direkte Anwendung unserer Methode zu einer elementaren Lösung der gestellten Aufgaben. Aber dies geschieht nicht ebenso in andern Fällen. Es kann sich in der Tat ergeben, daß die beiden Bedingungen, auf Grund deren man in der Ebene Punkte bestimmen will, einzeln genommen, auf höhere geometrische Örter als Gerade und Kreis führen. Dann werden sich die zu konstruierenden Punkte als Schnittpunkte solcher höherer Linien darstellen; jedoch werden sie oft auch in andrer Weise mit Hilfe von Geraden und Kreisen erhalten werden. Dies geschieht z. B. bei denjenigen Aufgaben, welche von der Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden und eines Kegelschnittes (Ellipse, Parabel oder Hyperbel) abhängen.

Um eine Vorstellung davon zu geben, wie diese Frage behandelt werden kann, betrachten wir sie in folgender Fassung, die sie in einer ihrer allgemeinen Erscheinungen darstellt:

Es sind die Punkte einer gegebenen Geraden zu bestimmen, deren Entfernungen von einem Punkte und einer anderen gegebenen Geraden in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

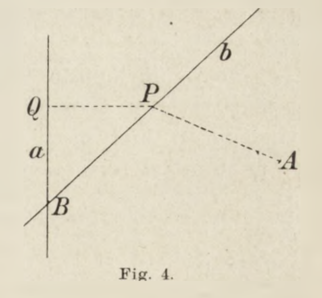


Fig. 4.

Der Ort der Punkte, deren Entfernungen von einem Punkte A und von einer Geraden a in einem gegebenen Verhältnisse stehen, ist bekanntlich ein Kegelschnitt, der den Punkt A zum Brennpunkte und die Gerade a zur Leitlinie hat. Aber es ist nicht nötig, diesen

Kegelschnitt zu zeichnen, wenn man seine Schnittpunkte mit einer Geraden b finden will. Man nehme in der Tat auf b einen beliebigen Punkt P an und fälle die Senkrechte PQ auf a, verbinde P mit A und bezeichne mit B den Schnittpunkt von a und b (vorausgesetzt, daß die beiden Geraden nicht parallel sind).

Läßt man dann P auf b variieren, so bleibt das Verhältnis

$$\frac{PB}{PQ} = \mu$$

konstant: daher sind die Punkte P von b, für welche

$$\frac{PA}{PQ} = \lambda$$

ist, auch diejenigen, für welche

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\lambda}{\mu}$$

ist, und sie gehören daher dem Kreise an, den wir in dem Beispiele 5 des § 2 bestimmt haben.

Außer der oben angeführten Aufgabe und den gleichwertigen Fällen, in denen es sich unter verschiedener Form immer um die Schnittpunkte eines Kegelschnitts mit einer Geraden handelt, gibt es noch andere Fälle elementar lösbarer Aufgaben, bei denen die direkte Anwendung der Methode der Örter dazu führen würde, daß man einen Kegelschnitt mit einem Kreise oder zwei Kegelschnitte von besonderer Beziehung zu einander sich schneiden lassen muß.

Wir beschränken uns darauf, ein sehr einfaches Beispiel anzudeuten.

Es sei die folgende Aufgabe gestellt:

Es ist ein Dreieck zu bestimmen, wenn man die Seite AB, den gegenüberliegenden Winkel γ und die Summe $AC + BC = s$ der beiden andern Seiten kennt.

Der unbekannte Eckpunkt C würde sich als einer der Schnittpunkte zweier geometrischer Örter darstellen: des Ortes der Punkte, von denen aus man AB unter dem Winkel γ sieht (dieser Ort besteht aus Kreisbogen), und des Ortes der Punkte, für welche die Summe der Entfernungen von A und B den konstanten Wert s hat. Aber dieser letzte Ort ist eine Ellipse und daher nicht elementar konstruierbar.

Man kann jedoch die Aufgabe in folgender Weise umformen: Wird sie als gelöst angenommen, so verlängere man die Strecke AC um die Strecke $CD = CB$. Die Konstruktion des Dreiecks ABC

läßt sich sofort auf die des Dreiecks ABD zurückführen, von dem zwei Seiten AB und $AD = s$ und der Winkel $ADB = \frac{\gamma}{2}$ gegeben sind.

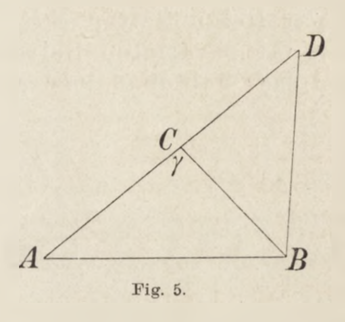


Fig. 5.

Dieses letzte Dreieck konstruiert man leicht durch Bestimmung zweier geometrischer Örter: des Ortes der Punkte, von denen aus man die Strecke AB unter dem Winkel $\frac{\gamma}{2}$ sieht, und des Ortes der Punkte, die von A um s entfernt sind.

§ 4. Transformationsmethoden. Die Schwierigkeit, welche die Lösung einer gegebenen Aufgabe darbietet, kann in manchen Fällen dadurch beseitigt werden, daß man die Lage der Figur ändert: durch eine Bewegung der Ebene oder allgemeiner dadurch, daß man einige ihrer Eigenschaften oder Eigenschaften eines ihrer Teile durch eine geeignete Transformation modifiziert.

Die einfachsten Transformationen, die dem Gebiete der elementaren Geometrie angehören, sind die Parallelverschiebung, die Symmetrie in bezug auf eine Gerade (die Umklappung der Ebene um diese Gerade), die Drehung um einen Punkt, die Ähnlichkeit und im besondern die Homothetie (Ähnlichkeit und ähnliche Lage), endlich die Transformation durch reziproke Radien.

Wir wollen an einigen Beispielen sehen, wie diese Transformationen ebenso viele oft nützliche Methoden für die Lösung der Aufgaben darbieten.

§ 5. Parallelverschiebung. Ein erstes, äußerst einfaches Beispiel, in dem eine Parallelverschiebung zur Anwendung kommt, ist folgendes:

Es seien zwei Strecken AB und CD der Größe und Lage nach gegeben; man soll ein Dreieck konstruieren, in dem zwei Seiten den genannten Strecken gleich sind und der von ihnen eingeschlossene Winkel der Winkel der beiden Geraden AB und CD (die als nicht parallel vorausgesetzt werden) ist. Es ist hier nur die Strecke CD parallel mit sich selbst so zu verschieben, daß C auf A fällt.

Eine weniger evidente Anwendung der Methode wird durch das folgende Beispiel dargeboten.

Es ist ein Trapez zu konstruieren, von dem die beiden

parallelen Seiten AB und DC, der Winkel α, der von den nicht parallelen Seiten gebildet wird, und das Verhältnis dieser beiden Seiten gegeben sind.

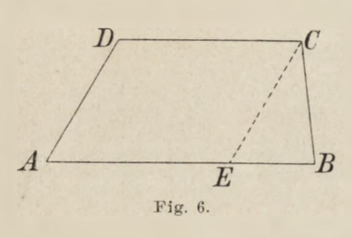


Fig. 6.

Angenommen, das Trapez $ABCD$ sei das verlangte, so verschiebe man die Seite AD parallel mit sich selbst nach EC. Von dem dadurch entstandenen Dreieck EBC kennt man eine Seite als die Differenz der Basen AB und DC, den Winkel α und das Verhältnis der beiden andern Seiten.

Die Aufgabe ist daher auf eine andere zurückgeführt, die nach der Methode der geometrischen Örter leicht zu lösen ist.

Die Verschiebungen der Seiten eines Dreiecks und eines Vierecks bieten eine leichte Lösung einer großen Zahl von Aufgaben dar.

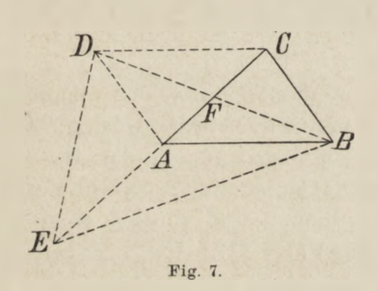


Fig. 7.

Verschiebt man in einem Dreiecke ABC (Fig. 7) AB parallel mit sich selbst nach DC, nimmt man AE in der Verlängerung von CA und gleich CA an und betrachtet man die Dreiecke EBD, ADE, ABD, AEB, so wird man leicht die folgenden Eigenschaften erkennen:

Die Seiten von EBD sind doppelt so groß als die Mittellinien von ABC und ihnen parallel (DB und FB liegen in der Tat auf derselben Geraden).

Die Seiten von ABC betragen zwei Drittel der Mittellinien von EBD und A ist der Schwerpunkt von EBD.

Zwei der Höhen der Dreiecke ADE, AEB, ABD sind zwei Höhen des gegebenen Dreiecks gleich, und die Fläche von EBD ist dreimal so groß als die von ABC.

Wenn also solche Elemente von ABC gegeben sind, daß auf Grund der oben ausgesprochenen Eigenschaften die Bestimmung eines der Dreiecke EBD, ADE, ABD, AEB möglich ist, dann wird das Dreieck ABC selbst konstruierbar sein.

Beispiel. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, wenn eine Mittellinie m_a und der Winkel, den die beiden anderen Mittellinien m_b und m_c mit einander bilden, gegeben sind und wenn die Beziehung bestehen soll:

$$m_b : m_c = p : q,$$

wo p und q gegebene Strecken sind.

In dem Dreiecke EBD kennt man dann $EB = 2m_a$, das Verhältnis der beiden anderen Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel EDB. Die Lösung der Aufgabe ist also auf die bereits erwähnte Aufgabe zurückgeführt, in der es sich darum handelt, ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und das Verhältnis der beiden andern Seiten gegeben sind.

Wenn man in dem Vierecke $ABCD$ die Seiten AB und AD parallel mit sich selbst nach CE und CF verschiebt, so wird man ein Parallelogramm $DBEF$ erhalten, dessen Seiten gleich und parallel den Diagonalen des Vierecks sind und dessen Diagonalen doppelt so groß sind als die Strecken, welche die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks verbinden, und überdies diesen Strecken parallel sind. Ferner sind zwei von den Strecken, welche C mit den Eckpunkten des Parallelogramms verbinden, Seiten des gegebenen Vierecks, und die anderen beiden sind den übrigen Seiten gleich; außerdem sind die von diesen Strecken gebildeten Winkel den Winkeln des Vierecks selbst gleich.

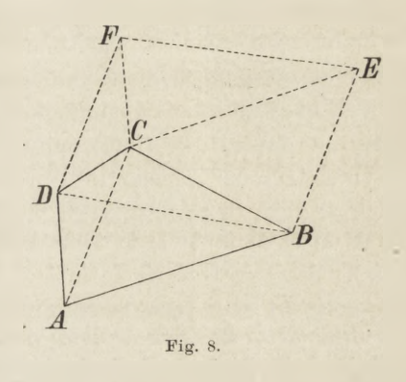


Fig. 8.

Auch in diesem Falle wird man, wenn solche Elemente des Vierecks gegeben sind, daß man auf Grund der angeführten Eigenschaften das Parallelogramm $DBEF$ und den Punkt C konstruieren kann, das Viereck konstruieren können.

Beispiel. Es ist ein Viereck $ABCD$ zu konstruieren, wenn die Strecken m und n, die die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten verbinden, der von diesen Strecken gebildete Winkel μ und zwei aufeinanderfolgende Seiten $BC = b$ und $CD = c$ gegeben sind.

Diese Aufgabe läßt sich auf Grund der erwähnten Eigenschaften auf die folgende zurückführen:

Es ist das Parallelogramm $DBEF$ zu konstruieren, wenn man die Diagonalen $2m$ und $2n$ und den von ihnen gebildeten Winkel μ kennt; darauf ist in seinem Innern ein

Punkt C zu konstruieren, der von B und von D um die Strecken b und c entfernt ist.

Im allgemeinen läßt sich ferner mit Hilfe der Verschiebung die Aufgabe lösen:

Es seien a und a' Linien und m eine durch die beiden Punkte C und D gegebene Strecke; es sind auf a und a' zwei Punkte A und A' von der Art zu konstruieren, daß die Strecke AA' gleich und parallel der Strecke CD ist.

§ 6. Umklappung um eine Achse. Mit der Umklappung der Ebene um eine Achse sucht man dieselben Vorteile wie mit der Parallelverschiebung zu erreichen: das Zusammenbringen gegebener Elemente, die Einführung bekannter Elemente, z. B. von Summen oder Differenzen von Strecken und Winkeln, das Aufeinanderlegen unbekannter gleicher Dinge, um eines davon zu eliminieren.

Diese Methode kann man auch Methode der Symmetrie nennen, da die durch die Umklappung gegebene Transformation eben eine Symmetrie der Ebene in bezug auf eine Gerade ist. Man begreift, daß, wenn man eine wirklich nützliche Transformation erhalten will, nur ein Teil der in Betracht kommenden Elemente durch die symmetrischen ersetzt werden darf.

Bevor wir einige Anwendungen dieser Methode zur Lösung von Aufgaben vorführen, wollen wir zusehen, wie J. Steiner gerade zur Betrachtung einer Symmetrie seine Zuflucht nimmt, um folgenden Satz zu beweisen:

Satz. Wenn in einem Dreiecke ABC die auf den Winkelhalbierungslinien zweier innerer Winkel gelegenen, von den Eckpunkten A und B und den gegenüberliegenden Seiten begrenzten Strecken AD und BE einander gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig.[1])

In der Tat, wenn z. B. $BC > AC$ wäre, so würde auch

$$\sphericalangle \tfrac{1}{2} BAC > \sphericalangle \tfrac{1}{2} CBA,$$

also $\sphericalangle BAD > \sphericalangle EBA$ und daher $BD > AE$ sein.

Andrerseits würde unter dieser Voraussetzung

$$\sphericalangle DAC > \sphericalangle CBE$$

und daher $\sphericalangle ADB > \sphericalangle AEB$ sein (als Außenwinkel der Dreiecke ADC und BCE).

1) J. Steiner, *Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und das sphärische Dreieck.* Gesammelte Werke, II, 323.

Wenn nun D' zu D in bezug auf den Mittelpunkt von AB symmetrisch ist, so wird offenbar AD' gleich und parallel BD und also

$$D'B = AD = BE$$

und der Winkel BED' gleich dem Winkel $BD'E$ sein, und da $\sphericalangle BD'A > \sphericalangle AEB$ ist, so wird $\sphericalangle ED'A > \sphericalangle AED'$ und also $AE > D'A$ oder $BD < AE$ sein, und dies ist das Gegenteil von dem, was wir oben festgestellt haben.

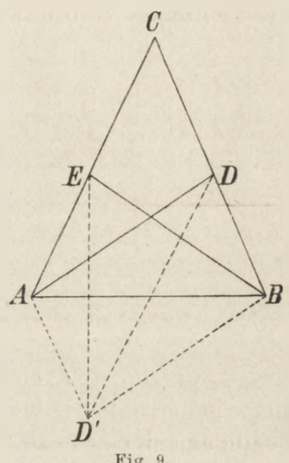


Fig. 9.

Es kann also nicht $BC > AC$ sein. In derselben Weise zeigt man, daß auch nicht $BC < AC$ sein kann, also muß $BC = AC$ sein, w. z. b. w.

Gehen wir nun dazu über, wie die Aufgaben, die mit der Theorie der Reflexion zusammenhängen, nach der Methode der Symmetrie gelöst werden.

1. Beispiel. Außerhalb einer Geraden a sind zwei Punkte B und C gegeben; man soll auf a einen Punkt X so bestimmen, daß die beiden von den Strahlen XB und XC mit den beiden Seiten der Geraden a gebildeten Winkel (Einfalls- und Reflexionswinkel) einander gleich sind.

Man betrachte den zu B in bezug auf a symmetrischen Punkt B': der Punkt X, in dem die Geraden $B'C$ und a sich schneiden, ist der verlangte Punkt.

Anmerkung. Da $BX + XC = B'C$ ist, so folgt, daß $BX + XC$, d. h. die Summe der Entfernungen von B und C von dem eben gefundenen Punkte X, kleiner ist als die entsprechende Summe in bezug auf jeden andern Punkt von a; daher gehört dieselbe Lösung auch zu der Aufgabe:

Es sind außerhalb einer Geraden a und auf einer und derselben Seite von ihr zwei Punkte B und C gegeben; es ist derjenige Punkt von a zu bestimmen, für welchen die Summe der beiden Entfernungen von B und C am kleinsten ist.

2. Beispiel. Es sind in einem Winkel POQ zwei Punkte A und D gegeben; man soll eine mehrfach gebrochene Linie $ABCD$ konstruieren, so daß B und C auf den Seiten OP

und OQ liegen und die Winkel PBA und CBO einerseits und OCB und DCQ andrerseits einander gleich sind.

Der Punkt D und der zu A in bezug auf OP symmetrisch liegende Punkt A' befinden sich hinsichtlich der Linie OQ in Lagen, wie sie das vorstehende Beispiel voraussetzt, und wenn daher $A'CD$ die gebrochene Linie ist, für welche

$$\sphericalangle OCA' = \sphericalangle DCQ$$

ist, so wird man, wenn man A mit B (dem Schnittpunkte von $A'C$ und OP) verbindet, in $ABCD$ die verlangte mehrfach gebrochene Linie erhalten,

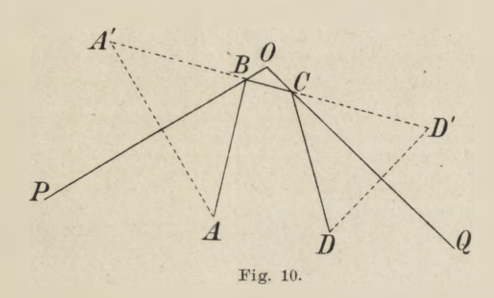


Fig. 10.

vorausgesetzt daß C auf OQ und B auf OP und nicht in deren Verlängerungen fallen. Diese Einschränkung gestattet die Diskussion der Bedingungen der Lösbarkeit der Aufgabe, was wir der Kürze halber übergehen.

Anmerkung. Wie im vorhergehenden Falle so beweist man auch hier, daß die so konstruierte mehrfach gebrochene Linie unter allen möglichen gebrochenen Linien, die in A und D endigen und auf OP und OQ Eckpunkte haben, die kleinste ist.

Durch ein rekurrentes Verfahren, durch ein Verfahren von derselben Art, wie man vom ersten Beispiele zum zweiten übergeht, kommt man zur Lösung der analogen Aufgabe für das Dreieck, das Viereck usw., und diese Aufgabe entspricht folgender physikalischen Frage:

Es sind im Innern eines Polygons zwei Punkte gegeben; man soll den (Licht-, Schall-, usw.) Strahl bestimmen, der, von einem dieser Punkte ausgehend und von allen Seiten des Polygons der Reihe nach reflektiert, schließlich durch den andern Punkt geht.

Wir wollen noch einige andere Beispiele anführen, in denen die Methode der Symmetrie zur Lösung von Aufgaben benutzt wird.

1. Beispiel. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, wenn die Differenz $BD - AD = d$ der Projektionen von BC und AC auf die dritte Seite, die zu dieser Seite gehörige Höhe h_c und die Differenz δ der Winkel BAC und CBA gegeben sind.

Setzen wir wie gewöhnlich die Aufgabe als gelöst voraus, so klappe man AC um die Höhe CD um nach A_1C; dadurch wird die Konstruktion von ABC auf die des Dreiecks A_1BC zurückgeführt, von dem man $A_1B = d$, den Winkel $A_1CB = \delta$ und die Höhe $CD = h_c$ kennt, und diese Konstruktion läßt sich nach der Methode der geometrischen Örter leicht ausführen.

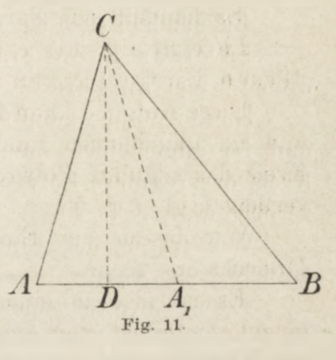


Fig. 11.

2. Beispiel. Es sind zwei Kreise um O und O' auf einer und derselben Seite einer Geraden AB gegeben; man soll auf dieser einen Punkt P so bestimmen, daß, wenn man die Tangenten PC und PD an die beiden Kreise zieht, die Winkel CPA und BPD einander gleich sind.

Setzt man die Aufgabe als gelöst voraus, so betrachte man den Kreis, der zu dem Kreise um O' in bezug auf AB symmetrisch ist; eine seiner Tangenten wird die Tangente CP des Kreises um O sein. Daher ist die Aufgabe auf folgende zurückgeführt: Es sind zwei Kreise um O und O'' gegeben (der Kreis um O'' liegt zu dem um O' symmetrisch); es ist die gemeinsame Tangente zu bestimmen. Diese Aufgabe hat bekanntlich im allgemeinen vier Lösungen, daher die vorgelegte Aufgabe ebenfalls.

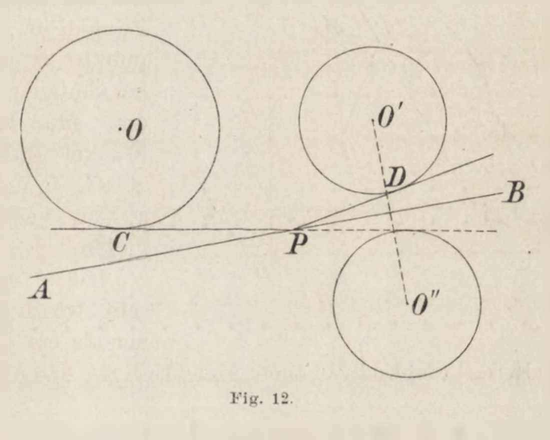


Fig. 12.

Nach dieser Methode kann man auch leicht die folgende Aufgabe lösen:

Es seien a und a' zwei Linien und es sei eine Gerade gegeben; man soll zwei auf a und a' gelegene Punkte A und A' bestimmen von der Art, daß die gegebene Gerade die Achse der Strecke AA' ist.

§ 7. Drehung um einen Punkt. Die Drehung um einen Punkt wird als Mittel zur Auflösung von Aufgaben meistens in Verbindung

mit einer Homothetie (§ 10) angewandt. Wir wollen jedoch eine einfache Gruppe von Aufgaben anführen, in denen die bloße Drehung zum Ziele führt.

Es handelt sich darum:

In einen Kreis ein reguläres Polygon einzubeschreiben dessen Umfang einen vorgeschriebenen Punkt enthält.

Diese Aufgabe kann für das Polygon von 3, 4, 5, 6, 8, 10 ... Seiten und im allgemeinen immer dann gelöst werden, wenn man in den Kreis das reguläre Polygon von derselben Seitenzahl einzubeschreiben vermag (vgl. Art. V).

Wir fassen der Einfachheit wegen den Fall des gleichseitigen Dreiecks ins Auge.

Es ist also in einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck einzubeschreiben, von dem eine Seite durch einen Punkt M im Innern des Kreises geht.

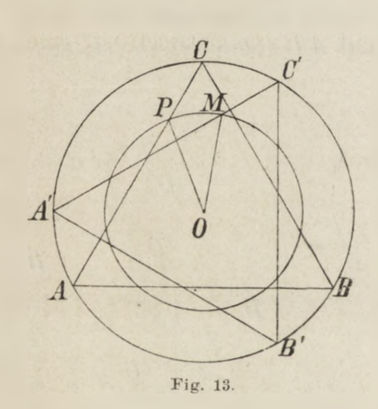


Fig. 13.

Man beschreibe in den gegebenen Kreis vom Mittelpunkte O ein gleichseitiges Dreieck ABC ein, und es sei P der Punkt, in dem der Kreis vom Mittelpunkte O und vom Radius OM eine der Seiten von ABC, z. B. AC, schneidet. Man lasse das Dreieck um einen Winkel gleich MOP in dem Sinne A, C, B um O sich drehen und wird so das verlangte Dreieck $A'B'C'$ erhalten.

Die Aufgabe wird immer möglich sein, wenn die Strecke OM nicht kleiner als ein Drittel der Höhe des in den Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist.

§ 8. Methode der Ähnlichkeit. Die Ähnlichkeitstransformation bietet auf doppelte Weise ein Mittel zur Auflösung von Aufgaben dar, insofern sie die Größe oder die Lage der zu konstruierenden Figur oder eines ihrer gegebenen Elemente zu modifizieren gestattet. Es kommt zur Anwendung dieser Methode im Hinblick auf den zuerst erwähnten Zweck, wenn es sich um die Konstruktion einer Figur handelt, die durch eine gewisse Zahl von Winkeln und durch eine Strecke von vorgeschriebener Größe oder durch eine gleichwertige Bedingung bestimmt ist; läßt man diese letzte Bedingung außer Betracht, so erhält man alsdann eine Reihe von Figuren, die der

verlangten Figur ähnlich sind, und diese kann daher konstruiert werden, wenn man sich der gegebenen Strecke zur Bestimmung des Ähnlichkeitsverhältnisses bedient. So führt die Methode der Ähnlichkeit zu einer Spaltung der gestellten Aufgabe in zwei einfachere Aufgaben, und das Ziel der zweiten Aufgabe besteht in der auf Grund einer quantitativen Bestimmung auszuführenden Konstruktion einer Figur, die einer gegebenen ähnlich ist.

Eine weitere Anwendung der Ähnlichkeit erhält man, wenn man das Verfahren, auf das eben hingedeutet wurde, mit einer Änderung der Lage der Figur oder eines Teils der Figur in der Ebene verbindet; in diesem Falle empfiehlt es sich, auf die systematischen Konstruktionen der Ähnlichkeit als ebener Transformation mit Hilfe der Homothetie zurückzugehen, verbunden (wenn es nötig ist) mit einer Drehung um einen Punkt oder einer Symmetrie in bezug auf eine Achse.

Wir beginnen mit der Erwähnung einiger Fälle, in denen die Ähnlichkeit nur in der ersten der beiden dargelegten Arten angewandt wird, und verweisen hinsichtlich ihrer weiteren Anwendung (auf die zweite Art) auf die Paragraphen 9 und 10.

1. Beispiel. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, wenn man den Winkel α, das Verhältnis der ihn einschließenden Seiten AC und AB ($AC : AB = m : n$) und die Länge w_a der Halbierungslinie des Winkels α kennt.

Man konstruiere ein Dreieck APQ, das den ersten beiden Bedingungen genügt. Um das Dreieck zu bestimmen, das APQ ähnlich ist und der dritten Bedingung genügt, trage man auf der Halbierungslinie des Winkels PAQ von A aus eine Strecke $AD = w_a$ ab und ziehe darauf durch D die Parallele zu PQ. Das dadurch bestimmte Dreieck ist das verlangte.

Auf dieselbe Weise kann man ein Dreieck konstruieren, von dem zwei Winkel und a) eine Höhe, oder b) eine Winkelhalbierungslinie, oder c) die Projektion einer Seite auf eine andere, oder d) der Umfang gegeben sind.

2. Beispiel. Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Eckpunkte je einem von drei gegebenen konzentrischen Kreisen angehören.

Man konstruiere irgend ein gleichseitiges Dreieck und suche einen Punkt, dessen Entfernungen von den Eckpunkten des Dreiecks den Radien der gegebenen Kreise proportional sind; diesen Punkt erhält man als Schnittpunkt zweier Kreise (§ 2, Beisp. 5). Man verbinde den gefundenen Punkt mit den Eckpunkten und ziehe von dem Mittel-

punkte der drei gegebenen konzentrischen Kreise aus parallele Radien. Auf diese Weise werden die drei Eckpunkte des verlangten Dreiecks bestimmt.

Diese Aufgabe wird also durch gleichzeitige Anwendung der Methode der Ähnlichkeit und der Methode der geometrischen Örter gelöst.

§ 9. Methode der umgekehrten Aufgabe. Die oben auseinandergesetzte Methode der Ähnlichkeit erfordert vor allem, daß man eine Figur konstruieren kann, die derjenigen, welche den Gegenstand der gestellten Aufgabe bildet, ähnlich ist. Dies kann nun manchmal durch eine einfache Umkehrung dieser Aufgabe erreicht werden, indem man also das Gegebene und das Gesuchte mit einander vertauscht.

Es mögen zwei hierher gehörige Beispiele angeführt sein.

1. Beispiel. Es ist um einen gegebenen Kreis ein Rhombus zu beschreiben, der einem gegebenen Rhombus $ABCD$ ähnlich ist.

Man zeichne den Kreis in den gegebenen Rhombus $ABCD$; dadurch wird man eine Figur erhalten, die derjenigen, die man bestimmen will, ähnlich ist. Konstruiert man dann die Figur, die dieser ähnlich ist, wobei der Radius des gegebenen Kreises dem des jetzt gefundenen homolog ist, so wird man die verlangte Lösung erhalten.

2. Beispiel. Es ist in ein Viereck $MNPQ$ ein Viereck zu beschreiben, das einem anderen gegebenen Viereck $ABCD$ ähnlich ist.

Die Aufgabe wird auf die umgekehrte Aufgabe zurückgeführt: man beschreibe um $ABCD$ ein Viereck $M'N'P'Q'$, das dem Viereck $MNPQ$ ähnlich ist, und transformiere dann die Figur durch Ähnlichkeit, indem man als Ähnlichkeitsverhältnis das Verhältnis der Seiten MN und $M'N'$ nimmt.

Die Umbeschreibung von $M'N'P'Q'$ um $ABCD$ kann auf Grund folgender Analysis ausgeführt werden.

Man setze die Aufgabe als gelöst voraus und setze ferner voraus, daß die Seiten $M'N'$, $N'P'$, $P'Q'$, $Q'M'$ durch die Punkte A, B, C, D gehen. Die Bedingungen für die Ähnlichkeit der beiden (konvexen) Vierecke $MNPQ$, $M'N'P'Q'$ können (wenn man die Diagonalen MP, $M'P'$ zieht) durch folgende Gleichungen zwischen Winkeln ausgedrückt werden:

$$\sphericalangle NMP = \sphericalangle N'M'P', \quad \sphericalangle MPN = \sphericalangle M'P'N',$$
$$\sphericalangle NMQ = \sphericalangle N'M'Q', \quad \sphericalangle QPN = \sphericalangle Q'P'N',$$

da diese auf die Ähnlichkeit der Dreiecke MNP, $M'N'P'$ und MPQ, $M'P'Q'$ führen. Die Kenntnis der Winkel $N'M'Q'$ und $Q'P'N'$ gestattet uns nun, über den Seiten DA und BC als Sehnen zwei Kreisbogen zu konstruieren, denen die Eckpunkte M' und P' angehören müssen. Man ziehe die Diagonale $M'P'$ und bezeichne mit R und S die Punkte, in denen sie nochmals die Kreise, denen die oben genannten Bogen angehören, schneidet; die Bogen DR und CS sind bekannt, da man die Winkel $P'M'Q'$ und $Q'P'M'$ kennt. Man kann also die Punkte R und S und daher M' und P' usw. konstruieren.

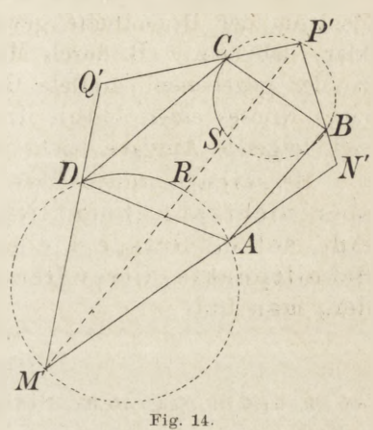


Fig. 14.

§ 10. Homothetie. Gehen wir nun dazu über zuzusehen, wie man die Ähnlichkeit in Fällen anwendet, in denen es nötig ist, nicht nur die Größe, sondern auch die Lage der gegebenen Figuren zu ändern.

Die Ähnlichkeitstransformation der Ebene kann man im allgemeinen durch eine Homothetie, verbunden mit einer Drehung um einen Punkt oder mit einer Umklappung um eine Achse, erhalten.

Jedoch beschränkt sich die Methode, von der wir handeln wollen, auf die Anwendung der Homothetie, verbunden mit der Anwendung der bereits in den Paragraphen 5 und 6 beschriebenen Methoden.

Sind in der Ebene irgend eine Figur und ein Punkt O als Zentrum gegeben, so kann man immer eine zur ersten homothetische Figur konstruieren von der Beschaffenheit, daß das Verhältnis zweier Strahlen, die von O nach homologen Punkten gehn, gleich dem Verhältnis zweier Strecken m und n mit dem Zeichen + oder — (direkte oder inverse Homothetie) ist, d. h. von der Beschaffenheit, daß, wenn man den Mittelpunkt O mit dem Punkte A der ersten Figur verbindet, der Strahl OA die zweite Figur in einem Punkte A' trifft, für den

$$\frac{OA}{OA'} = \pm \frac{m}{n}$$

ist, so daß A und A' sich auf derselben Seite von O befinden, wenn das obere Zeichen gilt, und auf entgegengesetzten Seiten, wenn das untere Zeichen gilt.

Wenn man mit einer Figur diese Operation vornimmt, so sagt man, daß man die gegebene Figur mit $\pm \frac{m}{n}$ in bezug auf den als Zentrum der Homothetie gewählten Punkt multipliziert, und es ist klar, daß man z. B. durch Multiplikation einer Geraden eine andere zu der gegebenen parallele Gerade erhält und durch Multiplikation eines Kreises einen andern Kreis. Auf Grund des Vorstehenden wird sich folgende Aufgabe leicht lösen lassen:

Es seien a und a' zwei Linien und O ein in ihrer Ebene aber nicht auf ihnen liegender Punkt; man soll durch O eine solche Gerade ziehen, daß, wenn mit A und A' die Schnittpunkte dieser Geraden mit a und a' bezeichnet werden, man hat

$$\frac{OA}{OA'} = \pm \frac{m}{n},$$

wo m und n gegebene Strecken sind.

Die gesuchte Gerade ist diejenige, welche O mit dem Schnittpunkte von a mit derjenigen Linie verbindet, welche man durch Multiplikation von a' mit $\pm \frac{m}{n}$ in bezug auf O erhält.

Beispiel. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten a und b und die zur dritten Seite gehörige Mittellinie m_c gegeben sind.

Hat man um irgend einen Punkt C als Mittelpunkt zwei konzentrische Kreise mit den Radien a und b beschrieben und eine Strecke $CD = m_c$ genommen, so multipliziere man einen der Kreise, z. B. den vom Radius b, in bezug auf D mit -1. Man wird dadurch einen Kreis vom Radius b erhalten, dessen Mittelpunkt C_1 in bezug auf D symmetrisch zu C ist. Wenn B ein Schnittpunkt dieses Kreises mit dem vom Radius a ist und A der Schnittpunkt von BD mit dem ursprünglichen Kreise vom Radius b, so wird ABC das verlangte Dreieck sein.

Es möge noch ein Beispiel folgen, in dem die Methode der Homothetie zur Anwendung kommt, wobei man durch die umgekehrte Aufgabe (§ 9) hindurchgeht.

Es soll in ein gegebenes Dreieck ein anderes Dreieck einbeschrieben werden, dessen Seiten der Reihe nach drei vorgeschriebenen, nicht zu einander parallelen Geraden parallel sind.

Man konstruiere irgend ein Dreieck $M'N'P'$, dessen Seiten den drei vorgeschriebenen Geraden parallel sind, und beschreibe um dieses

Dreieck ein Dreieck $A'B'C'$, dessen Seiten denen des gegebenen Dreiecks parallel sind. Infolge einer bekannten Eigenschaft werden die drei Geraden AA', BB', CC' in einem Punkte O zusammentreffen. Verbindet man O mit M', N', P', so werden die Schnittpunkte M, N, P dieser Geraden mit den Seiten AB, BC, CA des Dreiecks ABC die Eckpunkte des verlangten Dreiecks ergeben.

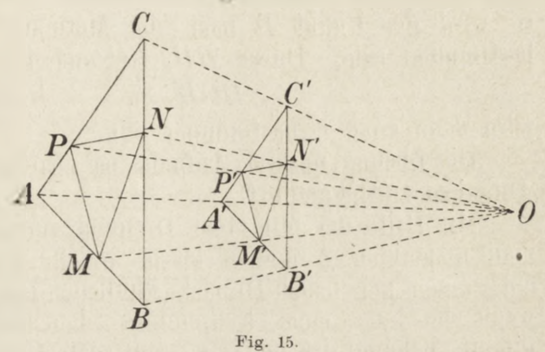


Fig. 15.

§ 11. Homothetie, verbunden mit einer Drehung. Wenn es sich hier auch um die gleichzeitige Anwendung zweier bereits beschriebener Methoden handelt, so ist es doch gut, an einigen Beispielen zu zeigen, welchen Gewinn man in der Ebene aus der Verbindung einer Homothetie mit einer Drehung um deren Zentrum ziehen kann.

Diese Operation bezeichnet man einfach, wenn man das Zentrum der Homothetie O, ihr Verhältnis m und den Drehungswinkel v nennt, als eine Multiplikation mit m_v in bezug auf O.

Beispiel. Es ist ein Viereck $ABCD$ zu konstruieren, wenn

$$AB = a \text{ und } BC = b$$

gegeben sind und man außerdem weiß, daß

$$CD : AD = p : q, \quad BD : AD = r : s,$$
$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle DCB = \alpha,$$

wo p, q, r, s Strecken sind und $\alpha < 2R$ ist.

Nehmen wir an, die Aufgabe sei gelöst. Man multipliziere die Strecke BC mit m_v in bezug auf D als Zentrum, wobei $m = \frac{p}{q}$ und $v = \sphericalangle ADC$ ist. Man erhält so die Strecke EA, und es wird $\sphericalangle BAE = \alpha$ sein, und so wird man genügende Daten haben, um das Dreieck ABE zu bestimmen. Da man ferner hat:

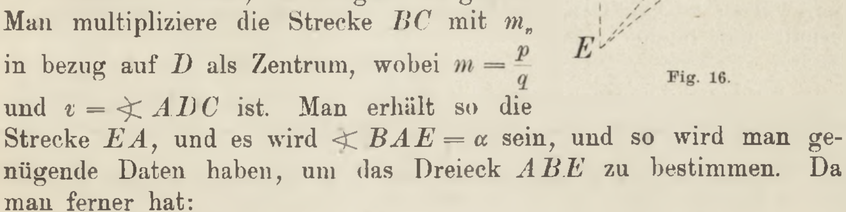


Fig. 16.

$$BD : ED = p : q$$
$$BD : AD = r : s,$$

so wird der Punkt D nach der Methode der geometrischen Örter bestimmbar sein. Durch BD, BC und den Winkel

$$DCB = \alpha - \sphericalangle BAD$$

wird dann auch C bestimmbar sein.

Die Lösung unserer Aufgabe ist also auf die anderer einfacherer Aufgaben zurückgeführt.

Mit Hilfe der mit einer Drehung verbundenen Homothetie kann man diejenigen Aufgaben lösen, welche sich auf die Konstruktion eines einem gegebenen Dreiecke ähnlichen Dreiecks zurückführen lassen, wenn die Lage eines Eckpunktes (den man zum Drehungszentrum nimmt) bekannt ist und man will, daß die beiden andern Eckpunkte sich auf zwei gegebenen Linien (Geraden, Kreisbogen) befinden.

Beispiel. Es ist in ein Parallelogramm $ABCD$ ein anderes Parallelogramm einzubeschreiben, von dem man den Winkel α der Diagonalen kennt und weiß, daß das Verhältnis der Diagonalen dem der gegebenen Strecken p und q gleich ist.

Es sei $EFGH$ das verlangte Parallelogramm, so daß E auf AB, F auf BC usw. liegt. Der Schnittpunkt O seiner Diagonalen wird der Schnittpunkt der Diagonalen des gegebenen Parallelogramms sein. Es sei in dem Dreiecke EOH der Winkel $HOE = \alpha$ und

$$EO : OH = p : q = m.$$

Nimmt man ein Dreieck PRQ an, in dem der Winkel $QRP = \alpha$ ist und die Seiten PR und RQ den Strecken p und q z. B. gleich sind, so ist die gegebene Aufgabe auf die folgende zurückgeführt:

Es ist ein Dreieck zu konstruieren, das dem Dreiecke PRQ ähnlich ist und von dessen Eckpunkten derjenige, der R entspricht, in O liegt und die beiden andern, den Punkten P und Q entsprechenden Eckpunkte in den Strecken AB und DA liegen.

Dieses Dreieck erhält man, indem man AB in bezug auf O mit m_α multipliziert: der Schnittpunkt der so erhaltenen Strecke mit DA ist, wofern er existiert, der verlangte Punkt H; den andern Punkt E erhält man leicht.

Sind in der Ebene zwei ähnliche, nicht homothetische Figuren F und F'[1]) gegeben, so werden die Elemente O, m, v der mit einer

1) Wenn F und F' homothetisch wären, so würde es nur einer Multiplikation bedürfen, um F mit F' zur Deckung zu bringen.

Drehung verbundenen Homothetie, durch die man F und F' zur Deckung bringen kann, leicht zu bestimmen sein. Es ist klar, daß der Drehungswinkel v der Winkel zweier homologer Geraden und das Verhältnis m das Verhältnis zweier homologer Strecken von F und F' ist.

Zur Bestimmung von O genügt die Bemerkung, daß das Drehungszentrum, der gemeinsame Punkt zweier homologer Geraden und ein Paar homologer Punkte sich auf einem Kreise befinden müssen; daher wird man den Punkt O in unzweideutiger Weise erhalten, wenn man auf zwei sich schneidenden homologen Geraden zwei Paare homologer Punkte annimmt und zwei jener Kreise beschreibt, die außer O noch einen gemeinsamen Punkt in dem Schnittpunkte der beiden Geraden haben. Man kann den Punkt O auch allgemein bestimmen, da das Verhältnis seiner Entfernungen von zwei homologen Punkten das Verhältnis der Homothetie selbst ist.

Hiernach ist es leicht, das Drehungszentrum zweier ähnlicher Punktreihen zu bestimmen, von denen zwei Paare homologer Punkte gegeben sind, und das zweier Kreise, auf denen ein Paar homologer Punkte gegeben ist, da die Mittelpunkte ein anderes Paar homologer Punkte bilden, und also diejenigen Aufgaben zu lösen, in denen zwei Gerade, eine Bedingung zur Bestimmung des Verhältnisses der Homothetie und ein Paar homologer Punkte gegeben sind und zwei andere homologe Punkte der beiden ähnlichen Punktreihen gesucht werden, die einer andern Bedingung genügen, z. B. auf einer Geraden liegen, die einer gegebenen Geraden parallel ist oder durch einen gegebenen Punkt geht, oder so gelegen sind, daß ihre Strecke einer gegebenen Strecke gleich ist, oder auch diejenigen Aufgaben zu lösen, in denen zwei Kreise und auf ihnen zwei homologe Punkte gegeben sind und zwei andere gesucht werden, die einer anderen Bedingung genügen.

Beispiel. Es sind zwei konvergente Gerade und auf ihnen die Punkte A und A' gegeben; es sollen auf ihnen zwei Punkte X und X' so bestimmt werden, daß

$$AX : A'X' = p : q \text{ und } XX' = a$$

ist, wo p, q, a gegebene Strecken sind.

Wenn wir die Aufgabe als gelöst voraussetzen, so werden A, X und A', X' zwei ähnliche Punktreihen bestimmen; es sei O das Zentrum der dazu gehörigen mit einer Drehung verbundenen Homothetie. Die Dreiecke $AA'O$ und $XX'O$ sind ähnlich; ist also O gefunden, so ist die Aufgabe auf die Konstruktion eines Dreiecks zurückgeführt, das $AA'O$ ähnlich ist und a zur homologen Seite von AA' hat.

Zur Bestimmung von O nehme man auf den Geraden zwei Punkte B und B' so an, daß

$$AB : AB' = p : q$$

ist; dann ist nur die oben angegebene Konstruktion auszuführen.

§ 12. Transformation durch reziproke Radien. Wenn man sich die Beziehungen vergegenwärtigt, die zwischen einer Figur und ihrer inversen, d. h. der durch reziproke Radien transformierten, Figur stattfinden — Erhaltung der Winkel, der Berührung; daß die inverse Figur einer Geraden eine Gerade oder ein Kreis ist, je nachdem die Gerade durch das Inversionszentrum geht oder nicht; daß die inverse Figur eines Kreises eine Gerade oder ein Kreis ist, je nachdem der Kreis durch das Inversionszentrum geht oder nicht, usw. — so wird man versuchen können, die gegebene Aufgabe mit Hilfe einer Transformation durch reziproke Radien, wobei das Zentrum und die Potenz der Inversion geeignet gewählt werden, auf eine andere bekannte Aufgabe oder auf eine solche zurückzuführen, auf die man die bereits auseinandergesetzten Methoden anwenden kann, oder allgemein auf eine solche, deren Lösung infolge der Verwandlung, die dabei die gegebenen und die gesuchten Dinge erfahren, geringere Schwierigkeiten darbietet.

Beispiel. Es ist ein Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt P geht und zwei gegebene Kreise mit den Mittelpunkten O und O' rechtwinklig schneidet.

Wenn man die inversen Figuren zu den beiden gegebenen Kreisen herstellt, wobei P zum Zentrum der Inversion und die Potenz der Inversion z. B. gleich der Potenz von P in bezug auf den Kreis vom Mittelpunkt O (um die Konstruktion zu vereinfachen, da dieser Kreis sich dann in sich selbst transformiert) genommen wird, so verwandelt sich der verlangte Kreis in eine Gerade, die, da sie den Kreis vom Mittelpunkte O und den zu dem Kreise vom Mittelpunkte O' inversen Kreis rechtwinklig schneiden muß, die Zentrale dieser beiden Kreise ist. Daraus ergibt sich eine leichte Lösung der Aufgabe.

Es geht aus der Definition hervor, daß, wenn man mit O das Inversionszentrum bezeichnet und mit F'' die in bezug auf O inverse Figur einer Figur F, irgend eine von O ausgehende Gerade die Figuren F und F'' in zwei Punkten A und A' von der Beschaffenheit trifft, daß das Rechteck aus OA und OA' auch im Zeichen konstant ist (die Potenz der Inversion), wobei die beiden Punkte A und A' sich auf entgegengesetzter Seite von O befinden, wenn

das Zeichen negativ ist, und auf derselben Seite im entgegengesetzten Falle.

Wenn man dies im Auge behält, so erhält man leicht die Lösung der allgemeinen Aufgabe:

Es sind zwei Linien a und a' und ein nicht auf ihnen liegender Punkt O gegeben; es ist durch O eine Gerade zu ziehen der Art, daß, wenn man mit A und A' die Schnittpunkte dieser Geraden mit a und a' bezeichnet, das Rechteck aus OA und OA' einem gegebenen Rechtecke (mit festgesetztem Zeichen) gleich ist.

Die Methode, die zur Lösung dieser Aufgabe dient und der Multiplikationsmethode analog ist, erscheint uns auch als eine spezielle Form der zuerst angegebenen Methode der geometrischen Örter.

Beispiel. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, von dem man kennt: das einbeschriebene Rechteck $EFGH$, von dem zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte, E, F, sich auf BC befinden, den der Seite BC gegenüberliegenden Winkel α und das Rechteck R aus den Strecken, die der Eckpunkt H auf der Seite AB bestimmt.

Die Analysis zeigt, daß der Scheitel A des Winkels α des verlangten Dreiecks sich außerhalb des gegebenen Rechtecks befindet und daß man von ihm aus HG unter dem Winkel α sieht; außerdem muß sich A auf der Linie befinden, die zu der Geraden EF invers ist, wenn man zum Zentrum der Inversion H und zu ihrer Potenz $-R$ nimmt, d. h. auf einem durch H gehenden Kreise, der also mit dem zu dem Winkel α gehörigen Kreisbogen über HG nur noch einen andern Punkt gemeinsam haben kann.

Es sei zu dem zweiten Beispiele des § 11 noch bemerkt, daß, wenn an Stelle des Verhältnisses der Seiten des Dreiecks EOH ihr Rechteck R gegeben wäre, man die inverse Figur zu AB in bezug auf O als Zentrum und R als Potenz der Inversion nehmen und um den Winkel α drehen müßte.

Die Transformation durch reziproke Radien findet eine systematische Anwendung bei den Aufgaben der Geometrie des Zirkels (vgl. Art. II).